7/10/2019

$\mathbb{R}^n$, $n=1,2,3$

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n\text{-φορές}} = \{(x_1,\ldots,x_n) / x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}\}$

$(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ διαν χώρος με πράξεις

$x+y=(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$

$\lambda x = \lambda(x_1,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$

$\mathbb{R}^n = n$ Η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι η $\{e_1=(1,0,\ldots,0), e_2=(0,1,\ldots,0),\ldots, e_n=(0,0,\ldots,1)\}$

ισχύει $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Συνήθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$ $\langle\,,\rangle$ $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(x,y)\mapsto \langle x,y\rangle \overset{\text{ορ}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$x=(x_1,\ldots,x_n)$

$y=(y_1,\ldots,y_n)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ $\langle\,,\rangle$

(i) $\langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle$

(ii) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

(iii) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$

(iv) $\langle x,x\rangle \geq 0$

$\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$

ΜΗΚΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ C-S

$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ Η ισότητα ισχύει μόνο αν (ανν) x,y γραμμικώς εξαρτημένα

- $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

• $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Η ισότητα ισχύει αν x,y ομόρροπα

ΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$x,y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\quad \left| \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \right| \le 1$ $\quad$ Υπάρχει μοναδική γωνία $\varphi \in [0,\pi]$

ώστε $\cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Τα διανύσματα x,y καλούνται κάθετα (ή ορθογώνια ή ορθοκάθετα)

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0$

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ

$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$

$d(x,y) = \|x-y\| = \|x+(-y)\|$ $\quad$ Αν $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$

τότε $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2}$

(i) $d(x,y) \ge 0$ και $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(ii) $d(y,x) = d(x,y)$

(iii) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

$(\mathbb{R}^n, d)$ τοπολογικός χώρος

Μια απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ καλείται ισομετρία αν-ν

$d(T(x),T(y)) = d(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

Θ

Κάθε ισομετρία $T \in Isom(\mathbb{R}^n)$ γράφεται $T = T_v \circ A$ όπου $T_v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι παράλληλη μεταφορά κατά $v \in \mathbb{R}^n$ ($T_v(p) = p+v$) και $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ορθ. μετασχ. δηλ. γραμμ. απεικόνιση που πληροί $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x,y\rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$T_{v_0} T_w = T_{v+w}$ T_0
v $w = -v$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΙΣΟΤΙΜΙΑ

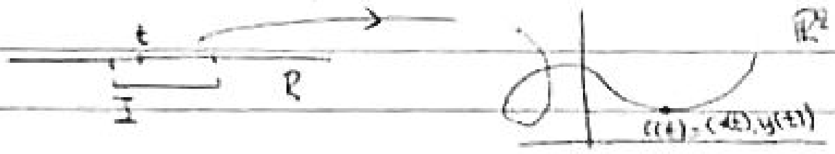
Ο

Δυο σχήματα $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ και $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^n$ καλούνται γεωμετρικώς ισότιμα αν-ν υπάρχει T- ισομετρία, $T \in Isom(\mathbb{R}^n)$ ώστε $T(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^2$

Ο

Καλούμε καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ κάθε απεικόνιση $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ όπου I είναι ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$



Το σύνολο $c(I) = \{ c(t) / t \in I \}$ καλείται εικόνα της καμπύλης c

- t καλείται παράμετρος της καμπύλης

Θα απαιτώ η c να είναι τάξεως διαφορισιμότητας C^r, $r \geq 1$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΙΣΟΤΙΜΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Ο

Δυο καμπύλες $c, \tilde{c} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καλούνται γεωμετρικώς ισότιμες αν υπάρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ ώστε $\tilde{c} = T \circ c$

Ο

Έστω $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ λεία (αρκούντως διαφορίσιμη) καμπύλη και $t_0 \in I$ το διάνυσμα $c'(t_0) = \frac{dc}{dt}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ καλείται διάνυσμα ταχύτητας της c στο $t_0 \in I$ ή εφαπτόμενο διάνυσμα της c στο $t_0 \in I$

$$c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Ο

Μια λεία καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}$ καλείται κανονική αν ισχύει $c'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$

Για κανονικές καμπύλες η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $c(t_0)$ και είναι $\parallel c'(t_0) \neq 0$ καλείται εφαπτομένη ευθεία της c στο t_0

ΕΡΩΤΗΜΑ

Είναι η κανονικότητα γεωμ. αναλλοίωτη?

Έστω $c, \tilde{c} = T \circ c$ γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες και υποθέτω ότι η c είναι κανονική $\tilde{c}(t) = T(c(t))$, $T = \tau_v \circ A$

$c(t) = (x(t), y(t))$, $c'(t) = (x'(t), y'(t))$

$\tilde{c}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$, $\tilde{c}'(t) = (\tilde{x}'(t), \tilde{y}'(t))$

$\tilde{c}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \tau_v(A(x(t), y(t))) = A(x(t), y(t)) + (v_1, v_2)$

$\Rightarrow \tilde{c}'(t) = (A(x(t), y(t)))' = A(x'(t), y'(t)) \Rightarrow \tilde{c}'(t) = Ac'(t)$

$\Rightarrow \|\tilde{c}'(t)\| = \|Ac'(t)\| = \|c'(t)\|$